Exercices de Travaux Dirigés
Chapitre 4 : Logarithme et exponentielle

Exercice 1. Faire l'étude et tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = x \ln x - x$.

Exercice 2. On définit la fonction *logarithme décimal* par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

1°) Calculer $\log 1$, $\log 10$, $\log 100$ et $\log 1000$.
2°) Calculer une valeur approchée de $\log 7$, $\log 15$, $\log 456$ et $\log 3490$.
3°) Calculer finalement les parties entières de tous les résultats précédents.
4°) Conclusion ?

Exercice 3.

1°) Etudier les variations de la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.
2°) En déduire que $\forall x > 0, \quad x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
3°) En déduire la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
4°) Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions :
$a(x) = \ln(1+x)$, $b(x) = x$ et $c(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln x$ **2°)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^2}$ **3°)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$ **4°)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^5 \ln x$ **5°)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Exercice 5. Soit $a > 0$ fixé. Calculer l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction $f(x) = a^x$.

Exercice 6. On considère les fonctions $f(x) = e^{-x}\sin x$ et $g(x) = e^{-x}\cos x$.

1°) Faire l'étude et tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
2°) Vérifier que f et g sont des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $y'' + 2y' + 2y = 0$.
3°) On admet que toute solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ est de la forme : $y(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des constantes. Trouver la fonction h solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ telle que $h(0) = 1$ et $h'(0) = 1$.

Exercice 7. Simplifier l'expression : $\dfrac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x}$.

Exercice 8. Calculer $\operatorname{ch}(a+b)$ en fonction de $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{sh} a$, $\operatorname{ch} b$ et $\operatorname{sh} b$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

<u>Indication</u>. Commencer par calculer $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$ *et* $\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$.

Exercice 9. Calculer les limites suivantes :

1°) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}$ **2°)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}} e^x$ **3°)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\pi}$

4°) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{|x|^{-\sqrt{2}}}$ **5°)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{-x}\, e^x$

Exercice 10. En utilisant la définition des fonctions hyperboliques, calculer :

1°) $\mathrm{ch}' x$ **2°)** $\mathrm{sh}' x$ **3°)** $\mathrm{th}' x$ **4°)** $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$

Exercices supplémentaires. Dans l'ouvrage « *Mathématiques - BTS DUT industriels* » de C. Larcher, M. Pariente et J.-C. Roy aux éditions TECHNIPLUS.

Chapitre 4 Ex. 1, 3, 4
Chapitre 5 Ex. 11